

Arvydas Jokimaitis, Darius Petronaitis

Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Studentų g. 48, LT-51368 Kaunas

E. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt, darius.petronaitis@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje rastas minimalių oro temperatūrų skirstinio įvertis, įvertinta apatinė oro temperatūros rekordo riba.

Raktiniai žodžiai: ekstremaliųjų reikšmių indeksas, ekstremaliųjų reikšmių statistika, meteorologija.

Įvadas

Pastaraisiais metais vis dažniau susiduriame su įvairiais ekstremaliais gamtos reiškiniais: karščiais, liūtimis, potvyniais, speigais ir pan. Klimatologų bendruomenėje vyrauja nuomonė, kad pastarasis dešimtmetis yra gamtos ekstremumų dešimtmetis. Todėl pasaulyje ekstremaliųjų gamtos reiškinų analizei skiriama daug dėmesio. Pažymėtina, kad prieš keletą metų netgi pradėtas leisti specialus žurnalas *Weather and Climate Extremes*. Ekstremaliųjų oro temperatūrų tematikai taip pat skirta nemažai publikacijų, iš kurių keletą naujesnių paminėsime [5, 9, 10, 11, 12].

Šiame straipsnyje tęsiame [6, 7, 8] darbuose pradėtą tyrimą. Pagrindinis mūsų tikslas įvertinti minimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymą bei jo parametrus ir nustatyti apatinę oro temperatūros ribą. Tyrime taikysime ekstremaliųjų reikšmių teoriją.

1 Duomenys

Lietuvos hidrometeorologijos tarnyba prie Aplinkos ministerijos pateikė informaciją apie minimalias oro temperatūras, užregistruotas visose 1961–2018 m. Lietuvos teritorijoje veikusiose meteorologinėse stotyse Pagal šių stočių duomenis nustatyti metiniai oro temperatūrų minimumai. Ši informacija pateikta 1 lentelėje.

Reikia pažymėti, kad mūsų turimi duomenys neatspindi visos Lietuvoje 1961–2018 m. sukauptos meteorologinės informacijos.¹ Be meteorologijos stočių temperatūras fiksavo įvairiu laiku Lietuvoje veikusios ir veikiančios agrometeorologijos, paprastosios klimato bei vandens matavimo stotys. Tačiau šių stočių sukaupta informa-

1 lentelė. Oro temperatūros metiniai minimumai, užregistruoti Lietuvos meteorologijos stotyse 1961–2018 m.

Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C
1961	–27,6	1976	–29,3	1991	–25,8	2006	–29,3
1962	–29,8	1977	–25,2	1992	–22,1	2007	–29,5
1963	–32,8	1978	–33,3	1993	–22,5	2008	–18,1
1964	–37,5	1979	–32,1	1994	–31	2009	–25,1
1965	–32,3	1980	–34,9	1995	–27	2010	–30,2
1966	–32,3	1981	–23,8	1996	–33,4	2011	–26,1
1967	–35	1982	–21,2	1997	–30,1	2012	–31,3
1968	–32,5	1983	–25,4	1998	–26,8	2013	–28,6
1969	–34	1984	–22,8	1999	–24,9	2014	–25,6
1970	–38	1985	–32,8	2000	–26,9	2015	–24
1971	–28,9	1986	–29,7	2001	–27,3	2016	–28,2
1972	–30,3	1987	–35,9	2002	–27,3	2017	–28,5
1973	–28,1	1988	–23,6	2003	–32,6	2018	–25,8
1974	–19	1989	–23,9	2004	–24,8		
1975	–21	1990	–21,1	2005	–25,5		

cija nėra iki galo sutvarkyta ir suskaitmeninta. Taip pat yra ir su iki 1961 m. surinkta meteorologijos stočių informacija. Todėl ji yra sunkiau prieinama tyrėjams.

2 Ekstremaliųjų reikšmių ribiniai pasiskirstymai

Tarkime, X_1, \dots, X_n, \dots – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys pasiskirstymo funkciją $F(x)$. Pažymėkime:

$$W_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Jei pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina tam tikras sąlygas [4], tai egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n\}$ ir $\{b_n > 0\}$, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = H_\gamma(x), \quad (1)$$

čia

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}), & \text{kai } 1 + \gamma x > 0, \gamma \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \text{kai } x \in \mathbb{R}, \gamma = 0, \end{cases}$$

– apibendrintasis maksimaliųjų reikšmių pasiskirstymas. Parametras γ vadinamas ekstremaliųjų reikšmių indeksu. Priklausomai nuo jo reikšmės, gauname tris maksimumų ribinio pasiskirstymo tipus:

1. Frešė pasiskirstymas, kai $\gamma > 0$;
2. Veibulo pasiskirstymas, kai $\gamma < 0$;
3. Gumbelio pasiskirstymas, kai $\gamma = 0$.

Pereisime prie minimumų ribinio pasiskirstymo. Kadangi

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = - \max_{1 \leq i \leq n} (-X_i),$$

tai

$$P(W_n < x) = 1 - P(Z_n \leq -x).$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad jei tenkinama (1) sąlyga, tai egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n\}$ ir $\{d_n > 0\}$, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < x\right) = L_\gamma(x),$$

čia $L_\gamma(x) = 1 - H_\gamma(-x)$ yra apibendrintasis minimaliųjų reikšmių skirstinys. Be to

$$c_n = -a_n, \quad d_n = b_n.$$

Kaip ir maksimumų atveju, priklausomai nuo parametro γ reikšmės, gauname tris atitinkamus ribinio pasiskirstymo tipus.

Darbe minimumų pasiskirstymą aproksimuosime ribiniu pasiskirstimu $L_\gamma\left(\frac{x-c_n}{d_n}\right)$.

3 Ekstremaliųjų reikšmių indekso įverčiai

Pateiksime šiame darbe taikytus įverčius. Tarkime, Z_1, \dots, Z_n – maksimumų seka. Sudarome jų variacinę seką:

$$Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(n)}.$$

Pažymėkime:

$$M_{i,k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\ln \left(\frac{Z_{(n-j+1)}}{Z_{(n-k)}} \right) \right)^i,$$

$$N_{i,k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (Z_{(n-j+1)} - Z_{(n-k)})^i,$$

čia $1 \leq k \leq n$, $i = 1, 2$.

1. Momentų įvertis [1]:

$$\hat{\gamma}_1 = M_{1,k,n} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{M_{2,k,n}}{M_{1,k,n}^2} - 1 \right)^{-1} \right).$$

Momentų įvertį pasirinkome todėl, kad jis universalus, t. y. nepriklauso nuo parametro γ ženklo. Pritaikę šį įvertį, gavome, kad ekstremaliųjų reikšmių indeksas γ yra neigiamas, todėl toliau taikėme įverčius, pateiktus [3] darbe kurie taikomi, kai $\gamma < 0$.

2.

$$\hat{\gamma}_2 = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M_{1,k,n}^2}{M_{2,k,n}} \right)^{-1}.$$

3.

$$\hat{\gamma}_3 = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N_{1,k,n}^2}{N_{2,k,n}} \right)^{-1}.$$

čia $k = k_n$, yra toks, kad $k = k_n \rightarrow \infty$ ir $k_n = o(n)$, kai $n \rightarrow \infty$.

Poslinkio parametro $a = a_n$ įvertis yra

$$\hat{a} = Z_{(n-k)}.$$

Jei parametro γ įvertis yra $\hat{\gamma}_j$ ($j = 1, 2, 3$), tai mastelio parametro $b = b_n$ įvertis atitinkamai yra:

$$\hat{b}_j = Z_{(n-k)} M_{1,k,n} (1 - \min(0, \hat{\gamma}_j)),$$

$j = 1, 2, 3$.

Pateikti apibendrintojo maksimaliųjų reikšmių pasiskirstymo parametrų įverčiai, nesunkiai pritaikomi ieškant minimaliųjų reikšmių pasiskirstymo parametrų įverčius. Pakanka įverčių išraiškose maksimumus Z_n pakeisti dydžiais

$$\tilde{Z}_n = \max_{1 \leq i \leq n} (-X_i)$$

ir atsižvelgti į tai, kad

$$\hat{c} = -\hat{a}, \quad \hat{d}_j = \hat{b}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

4 Apatinė minimumų riba

Tarkime, turime minimumų seką W_1, \dots, W_n , kurios ribinė pasiskirstymo funkcija $L_\gamma(x)$. Pažymėkime

$$x^* = \inf\{x : L_\gamma(x) > 0\}.$$

Tada apatinė minimumo riba negali būti mažesnė už x^* . Tokiu atveju galime sakyti, kad x^* yra apatinė minimalių reikšmių riba.

Pritaikę [2] darbe pasiūlytą maksimumų viršutinės ribos įvertį minimumams, gauname

$$x_j^* = \hat{c} + \frac{\hat{d}_j}{\hat{\gamma}_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Šis įvertis taikomas, kai $\gamma < 0$. Kai $\gamma \geq 0$, $x_j^* = -\infty$.

5 Pagrindiniai rezultatai

Skačiuojant ekstremaliųjų reikšmių indekso įverčius, k reikšmė parenkama taikant euristinį metodą, aprašytą [2]. Mes k parinksime tokį, kad su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0,05$ būtų priimtina suderinamumo hipotezė, kad Lietuvos minimalių oro temperatūrų pasiskirstymo funkcija yra $L_{\hat{\gamma}}(\frac{x-\hat{c}}{\hat{d}})$. Šiuo atveju Kolmogorovo – Smirnovo kriterijaus kritinė reikšmė lygi 0,175 todėl visais trim atvejais suderinamumo hipotezė neatmestina, kai $31 \leq k \leq 35$. Naudodamiesi, 1 lentelėje pateikta informacija įvertinome Lietuvos oro temperatūros minimumų pasiskirstymo parametrų įverčius ir nustatėme oro temperatūros minimumų apatinę ribą. Rezultatai pateikti 2 lentelėje.

6 Išvados

1 išvada. Oro temperatūros metiniai minimumai turi Veibulo minimaliųjų reikšmių pasiskirstymą.

2 išvada. Oro temperatūros metinių minimumų apatinė riba nemažesnė už -38°C .

2 lentelė. Lietuvos oro temperatūros minimumų pasiskirstymo parametrų įverčiai ir oro temperatūros minimumų apatinė riba, kai $k = 35$.

Parametro γ įvertis	\hat{c}	\hat{d}	x^*
$\hat{\gamma}_1$	-0,57	-26,8	6,08
$\hat{\gamma}_2$	-0,72	-26,8	6,64
$\hat{\gamma}_3$	-0,58	-26,8	6,1

Literatūra

- [1] A. Dekkers, J. Einmahl and L. de Haan. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Stat.*, **17**:1833–1855, 1989.
- [2] J. Einmahl and J.R. Magnus. Records in athletics through extreme-value theory. *J. Am. Stat. Assoc.*, **103**(484):1382–1391, 2008.
- [3] A. Ferreira, L. de Haan and L. Peng. On optimizing the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics*, **37**:401–434, 2003.
- [4] B.V. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Ann. Math.*, **44**(3):423–453, 1943.
- [5] R. Grotjahn, R. Black, R. Leung, M.F. Wehner, M. Barlow, M. Bosilovich, A. Gershunov, W.J. Gutowski Jr., J.R. Gyakum, R.W. Katz, Yun-Young Lee, Young-Kwon and L. Prabhat. North American extreme temperature events and related large scale meteorological patterns: a review of statistical methods, dynamics, modeling, and trends. *Clim. Dyn.*, **46**:1151–1184, 2016.
- [6] A. Jokimaitis and D. Petronaitis. Apie maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymą. *Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. B*, **54**:12–16, 2013.
- [7] A. Jokimaitis and D. Petronaitis. Maksimalių oro temperatūrų skirstinio analizė. *Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. B*, **56**:13–17, 2015.
- [8] A. Jokimaitis and D. Petronaitis. Oro temperatūrų ekstremaliųjų reikšmių indekso branduolinis įvertis. *Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. B*, **58**:28–32, 2017.
- [9] R.W. Katz and R. Grotjahn. Statistical methods for relating temperature extremes to large-scale meteorological patterns. *US Clivar Var.*, **12**(1):4–7, 2014.
- [10] I. Keggenhoff, M. Elizbarashvili and L. King. Recent changes in Georgia’s temperature means and extremes: Annual and seasonal trends between 1961 and 2010. *Weath. Cl. Extr.*, **8**:34–45, 2015.
- [11] J. Lee. Future trend in seasonal lengths and extreme temperature distributions over South Korea. *Asia-Pac. J. Atmos. Sci.*, **53**(1):31–41, 2017.
- [12] J. Suomi. Extreme temperature differences in the city of Lahti, southern Finland: Intensity, seasonality and environmental drivers. *Weath. Cl. Extr.*, **19**:20–28, 2018.

SUMMARY

The distribution of minimum air temperature in Lithuania

A. Jokimaitis, D. Petronaitis

The article authors detected distribution estimates of minimum air temperature in Lithuanian. Also estimated ultimate minimum temperature record.

Keywords: extreme value index, statistics of extremes, meteorology.